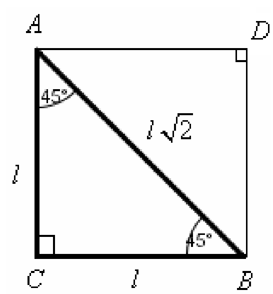
- En los **triángulos especiales** se puede encontrar la medida de los tres lados, conociendo únicamente uno de ellos.

C. Triángulos especiales

Existen triángulos cuya relación entre lados es sencilla y nos permite, conociendo la medida de uno de los lados, encontrar la medida de los otros dos. Esos triángulos se llaman **triángulos especiales** y recordarlos será de mucha utilidad en el capítulo de trigonometría y en 11mo año.

C.1 Triángulo rectángulo isósceles

Sea ΔABC un triángulo rectángulo (en C) isósceles. Es decir, el triángulo que se obtiene al dividir un cuadrado por su diagonal. Entonces, los ángulos del triángulo deben medir $45° - 45° - 90°$.



Además, sea $l = AC = CB$. Por el teorema de Pitágoras se cumple que:

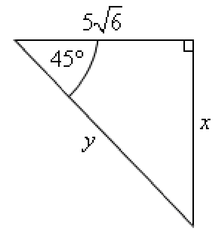
$$l^2 + l^2 = AB^2 \Rightarrow 2l^2 = AB^2 \Rightarrow AB = l\sqrt{2}.$$

Entonces, para encontrar la medida de los otros dos lados de un triángulo rectángulo isósceles, conociendo la medida de uno, utilizamos las siguientes relaciones:

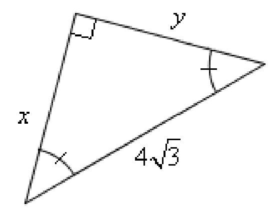
- Cuando el lado conocido es un cateto, el otro cateto debe medir igual y para encontrar la medida de la hipotenusa basta multiplicar por $\sqrt{2}$.
- Si conocemos la hipotenusa, para encontrar la medida de los catetos, se divide la hipotenusa por $\sqrt{2}$.

EJEMPLO 7. En las siguientes figuras encuentre los valores numéricos de las variables.

a)



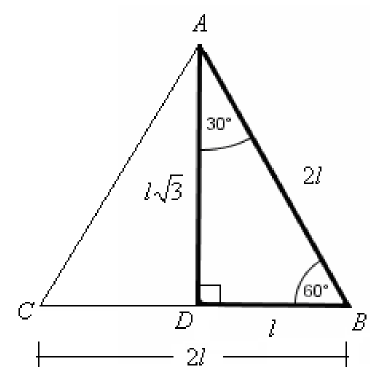
b)



EJEMPLO 8. En un cuadrado de área $20\,cm^2$. Encuentre la medida de la diagonal.

C.2 Triángulo semi-equilátero

Sea ΔABC un triángulo equilátero. Sea D el punto medio de $\overline{BC}$. Como en un triángulo equilátero los segmentos notables coinciden, entonces: $m\angle BAD = 30°, m\angle BDA = 90°$.



Además, si $BC = 2l$, entonces $AB = 2l$ y $BD = l$.
Por el teorema de Pitágoras:

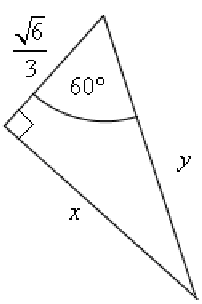
$$l^2 + AD^2 = (2l)^2 \Rightarrow AD^2 = 4l^2 - l^2$$
$$\Rightarrow AD^2 = 3l^2 \Rightarrow AD = l\sqrt{3}$$

Entonces, para encontrar la medida de los otros dos lados de un triángulo semi-equilátero, conociendo la medida de uno, utilizamos las siguientes relaciones:

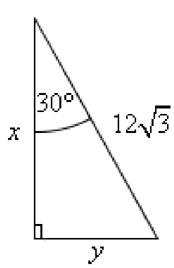
- Cuando tenemos el cateto opuesto a $30°$, la hipotenusa debe medir el doble. Para encontrar la medida del cateto opuesto a $60°$ basta multiplicar la medida del cateto opuesto a $30°$ por $\sqrt{3}$.
- Si tenemos la hipotenusa, el cateto opuesto a $30°$ medirá la mitad, y el cateto opuesto a $60°$ este resultado multiplicado por $\sqrt{3}$.
- Si tenemos el cateto opuesto a $60°$, para encontrar la medida del cateto opuesto a $30°$, se debe dividir entre $\sqrt{3}$. La hipotenusa medirá el doble de ese resultado.

EJEMPLO 9. En las siguientes figuras encuentre los valores numéricos de las variables.

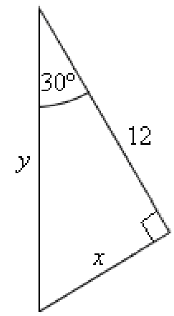
a)



b)



c)



EJEMPLO 10. En un rectángulo, la diagonal forma con el largo de $12cm$ un ángulo de $30°$. Encuentre el área.

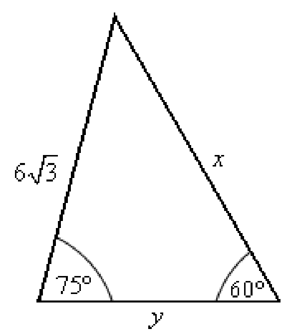
C.3 Combinación de triángulos

En ocasiones, veremos cómo dos triángulos especiales se unen en una misma figura.

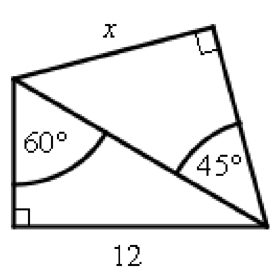
Para encontrar las medidas pedidas debemos partir de los datos conocidos e ir señalando las medidas de los lados que vamos encontrando. En ocasiones, dibujar líneas auxiliares será de mucha ayuda.

EJEMPLO 11. En las siguientes figuras encuentre los valores de las variables.

a)



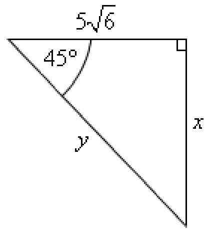
b)



Soluciones C.

EJEMPLO 7. En las siguientes figuras encuentre los valores numéricos de las variables.

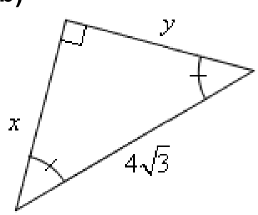
a)



Como el triángulo es rectángulo isósceles, entonces $x = 5\sqrt{6}$ ya que los catetos deben medir igual.

Para encontrar la medida de la hipotenusa multiplicamos lo que miden los catetos por $\sqrt{2}$, entonces: $y = 5\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{12} = 5\cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

b)



Primero observemos que $x = y$ porque el triángulo es isósceles. Como tenemos la medida de la hipotenusa, la medida de los catetos se encuentra dividiendo entre $\sqrt{2}$, es decir: $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ y racionalizando

$x = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$.

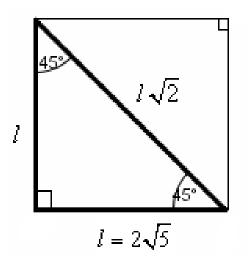
EJEMPLO 8. En un cuadrado de área $20\,cm^2$. Encuentre la medida de la diagonal.

De la fórmula de área de un cuadrado tenemos

$A = 20 \Rightarrow l^2 = 20 \Rightarrow$

$l = \pm\sqrt{20} \Rightarrow l = 2\sqrt{5}$

ya que $l > 0$.

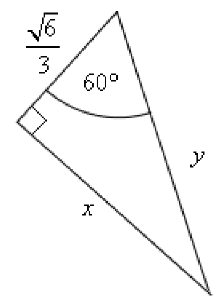


Luego, la diagonal la encontramos utilizando triángulos especiales:

$d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$

EJEMPLO 9. En las siguientes figuras encuentre los valores numéricos de las variables.

a)



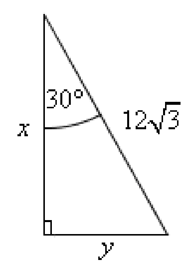
Ya que tenemos el cateto opuesto a $30°$, la medida de la hipotenusa deber ser el doble de esta, es decir $y = 2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

.

Para encontrar la medida del cateto opuesto a $60°$, se multiplica por $\sqrt{3}$ la medida del cateto opuesto a $30°$. Entonces,

$x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{18}}{3} = \dfrac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}} = \sqrt{2}$.

b)



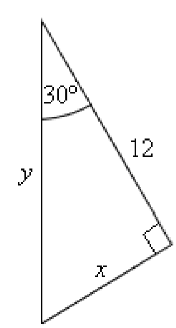
Si tenemos la medida de la hipotenusa, la medida del cateto opuesto a $30°$ es la mitad. Entonces, $y = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Para encontrar la medida del cateto opuesto a $60°$, se multiplica por $\sqrt{3}$ la medida del cateto opuesto a $30°$. De ahí que: $x = 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6\cdot 3 = 18$.

c)

En este caso tenemos la medida del cateto opuesto a $60°$, para encontrar la medida del cateto opuesto a $30°$ se divide entre $\sqrt{3}$, es decir:

$x = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$ y racionalizando,

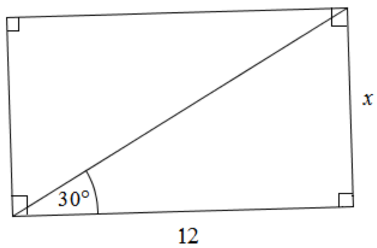


$x = \dfrac{12}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$.

La hipotenusa mide el doble de x,

$y = 2\cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

EJEMPLO 10. En un rectángulo, la diagonal forma con el largo de $12cm$ un ángulo de $30°$. Encuentre el área.



Sea x la medida del ancho del rectángulo. Entonces, por triángulos especiales, $x=\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ y al racionalizar:

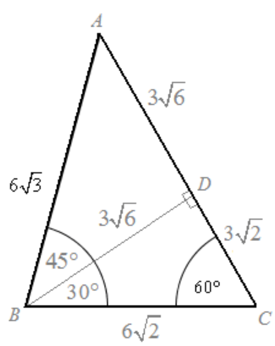
$$x=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,.$$

Luego, el área es $A=12\cdot 4\sqrt{3}=48\sqrt{3}\,cm^2$.

EJEMPLO 11. En las siguientes figuras encuentre los valores de las variables.

a)

En la figura nombramos los vértices y dibujamos la altura sobre el lado de medida x.



Observe que esta altura divide al triángulo original en dos triángulos especiales, uno rectángulo isósceles y el otro semi-equilátero.

Entonces para calcular BD debemos dividir AB entre $\sqrt{2}$.

$$BD=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow BD=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}\,.$$

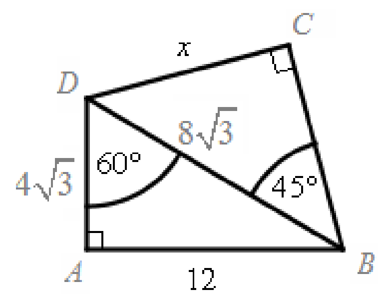
Además, $AD=3\sqrt{6}$ porque ΔABD es isósceles. Como el ΔBCD es semi-equilátero, para calcular DC se debe dividir BD entre $\sqrt{3}$:

$$DC=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\Rightarrow DC=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{18}}{\cancel{3}}=3\sqrt{2}\,.$$

Además, $BC=2\cdot CD\Rightarrow\ BC=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

Así, $x=AD+DC=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ y $y=6\sqrt{2}$.

b) En la figura anterior, nombramos los vértices.



Aplicando los triángulos especiales:

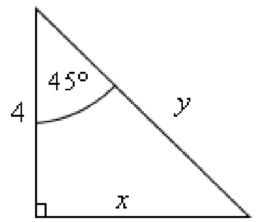
$$AD=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}\Rightarrow AD=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,.$$

$$BD=2\cdot AD=2\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}\,.$$

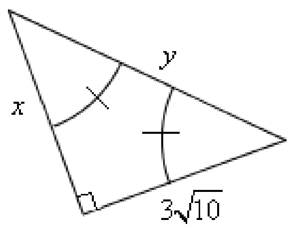
$$x=CD=\frac{BD}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{6}}{2}=4\sqrt{6}$$

Ejercicio C.1 En cada figura, encuentre los valores numéricos de las variables.

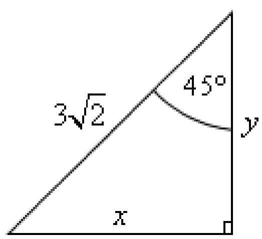
1.



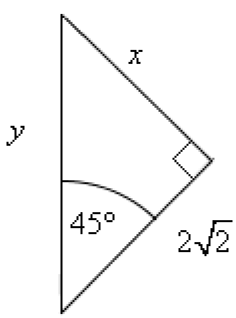
2.



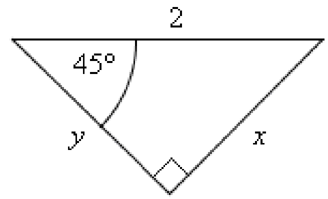
3.



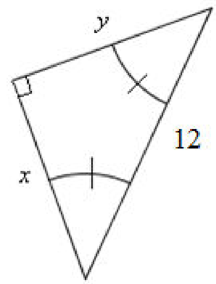
4.



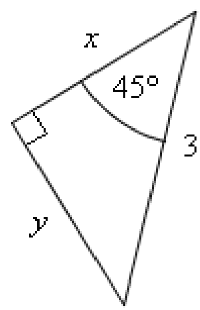
5.



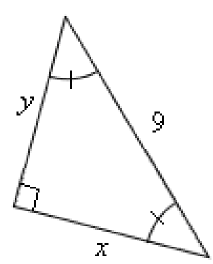
6.



7.

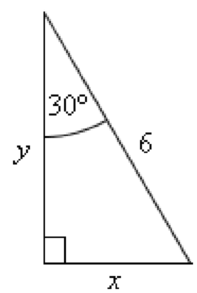


8.

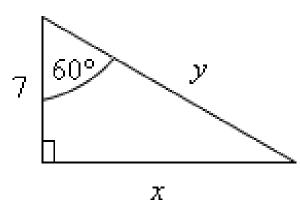


Ejercicio C.2 Encuentre los valores numéricos de las variables.

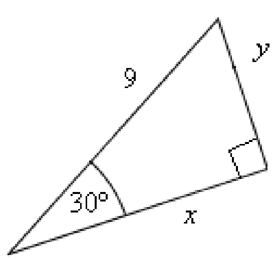
1.



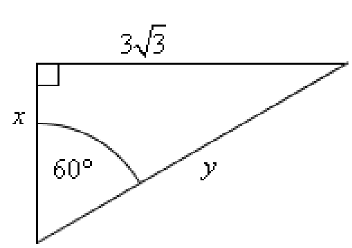
2.



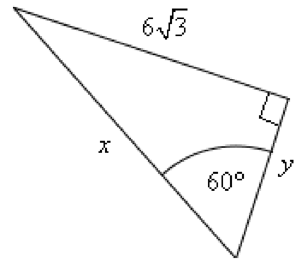
3.



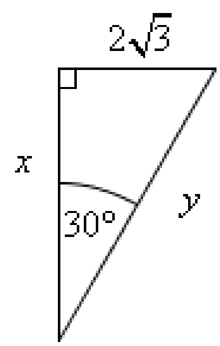
4.



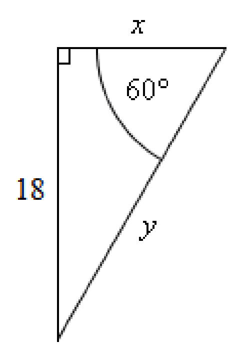
5.



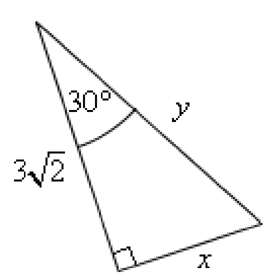
6.



7.



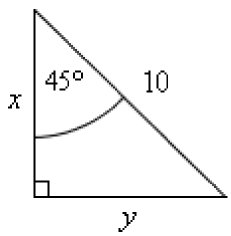
8.



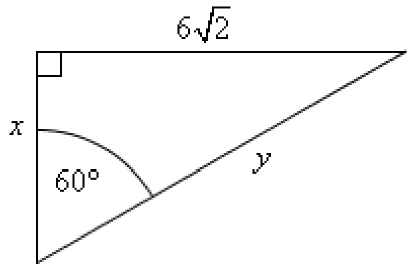
Ejercicio C.3

I PARTE: Encuentre los valores numéricos de las variables.

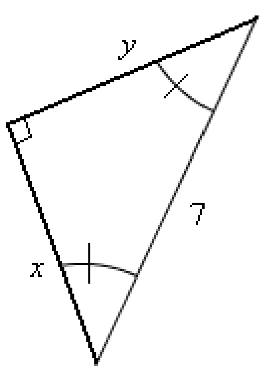
1.



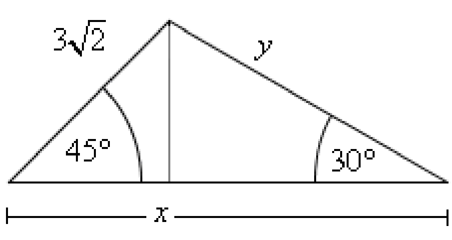
2.



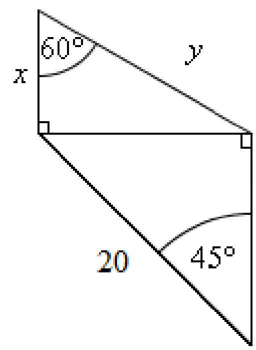
3.



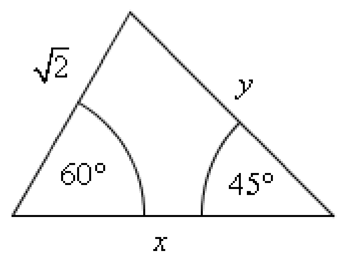
4.



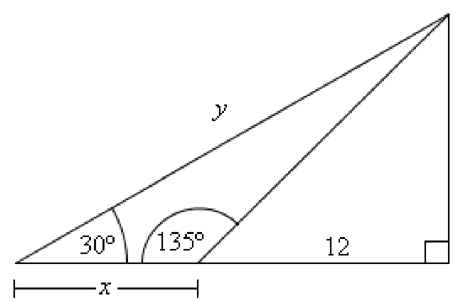
5.



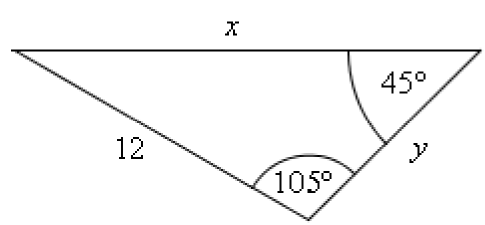
6.



7.



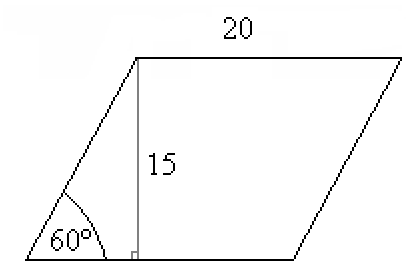
8.



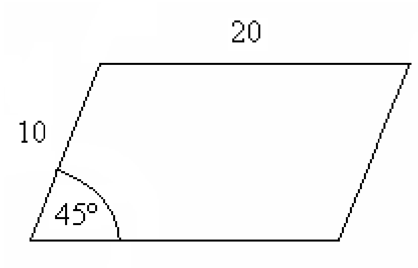
II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. En los siguientes romboides, encuentre el área y el perímetro

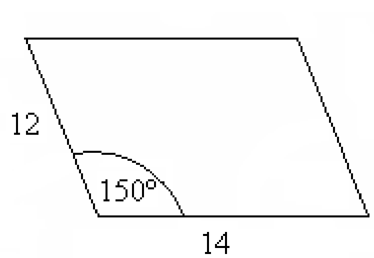
a)



b)



c)



2. En un trapecio isósceles, un ángulo mide $30°$, la base mayor $16cm$ y la paralela media $13cm$. ¿Cuánto es el área y el perímetro del trapecio?

3. En un rombo, un ángulo interno mide $120°$ y la diagonal **mayor** $6\sqrt{3}cm$. Encuentre el área y el perímetro del rombo.

4. En un rombo, un ángulo interno mide $120°$ y la diagonal **menor** $6\sqrt{3}cm$. Encuentre el área y el perímetro del rombo.

5. En un cuadrado, la diagonal mide $5\sqrt{2}m$. ¿Cuánto es el perímetro?

6. En un cuadrado, la diagonal mide $6m$. ¿Cuánto es el perímetro?

Respuestas

Ejercicio C.1

1. $x = 4,\ y = 4\sqrt{2}$
2. $x = 3\sqrt{10},\ y = 6\sqrt{5}$
3. $x = y = 3$
4. $x = 2\sqrt{2},\ y = 4$
5. $x = y = \sqrt{2}$
6. $x = y = 6\sqrt{2}$
7. $x = y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
8. $x = y = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio C.2

1. $x = 3,\ y = 3\sqrt{3}$
2. $x = 7\sqrt{3},\ y = 14$
3. $x = \dfrac{9\sqrt{3}}{2},\ y = \dfrac{9}{2}$
4. $x = 3,\ y = 6$
5. $x = 12,\ y = 6$
6. $x = 6,\ y = 4\sqrt{3}$
7. $x = 6\sqrt{3},\ y = 12\sqrt{3}$
8. $x = \sqrt{6},\ y = 2\sqrt{6}$

Ejercicio C.3
I PARTE:

1. $x = y = 5\sqrt{2}$
2. $x = 2\sqrt{6}, y = 4\sqrt{6}$
3. $x = y = {}^{7\sqrt{2}}\!/_{2}$
4. $x = 3 + 3\sqrt{3}\ \ y = 6$
5. $x = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}, y = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$
6. $x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\ \ y = \sqrt{3}$
7. $x = 12\sqrt{3} - 12\ ,\ y = 24$
8. $x = 6\sqrt{3} + 6\ ,\ y = 6\sqrt{2}$

II PARTE:

1.

a. $A = 300cm^2,\ P = 40 + 20\sqrt{3}cm$

b. $A = 100\sqrt{2}cm^2, P = 60cm$

c. $A = 84ul^2,\ P = 52ul$

2. $A = 13\sqrt{3}\ cm^2,\ \ P = \left(26 + 4\sqrt{3}\right)cm$

3. $A = 18\sqrt{3}cm^2,\ P = 24cm$

4. $A = 54\sqrt{3}cm^2,\ P = 24\sqrt{3}cm$

5. $P = 20m$

6. $P = 12\sqrt{2}m$